

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н.Э.БАУМАНА**

Л.А.Лунёва, С.Н.Тараненко, В.Г.Голубев, А.В.Козырев, А.В. Купавцев.

**Электростатика. Магнитостатика. Электромагнитная
индукция. Электрическое поле в проводящей среде.**

Методические указания к выполнению домашнего задания
по курсу “Общая физика”.

Издательство МГТУ им. Н.Э.Баумана

АННОТАЦИЯ

на методические указания к выполнению домашнего задания по курсу “Общая физика” по темам: “Электростатика. Магнитостатика. Электрическое поле в проводящей среде. Электромагнитная индукция.” авторов Л.А.Лунёвой, С.Н.Тараненко, В.Г.Голубева, А.В.Козырева, А.В.Купавцева.

В методических указаниях изложены методы решения задач по фундаментальным разделам курса общей физики “Электромагнитостатика. Электрическое поле в проводящей среде. Электромагнитная индукция”. В каждом разделе приведены необходимые краткие теоретические сведения, содержащие фундаментальные утверждения в виде теорем или обобщений, а также разобраны решения типовых задач, где показывается, как, по мнению авторов, надо подходить к их решению.

Методические указания предназначены для студентов второго курса третьего семестра обучения всех специальностей и будут полезны для углублённого изучения указанных разделов курса общей физики.

Под редакцией д.т.н., проф. А.М. Макарова.

1. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

1.1 Основные теоретические сведения

Теорема Гаусса для вектора напряженности электростатического поля \vec{E} в диэлектрике.

Поле вектора \vec{E} в диэлектрике обладает замечательным и важным свойством: поток вектора \vec{E} сквозь любую замкнутую поверхность S равен алгебраической сумме зарядов (как сторонних q , так и связанных q'), охватываемых этой поверхностью, делённой на ϵ_0 , т.е.

$$\oint_S (\vec{E}, d\vec{s}) = \frac{1}{\epsilon_0} (q + q'), \quad (1.1)$$

где вектор $d\vec{s} = \vec{n}ds$, \vec{n} – внешняя нормаль по отношению к объёму, охватываемому поверхностью S , а кружок у интеграла означает, что интегрирование проводится по замкнутой поверхности S . Уравнение (1.1) и выражает теорему Гаусса для вектора напряженности электростатического поля \vec{E} в диэлектрике.

Дифференциальная форма теоремы Гаусса для вектора напряженности электростатического поля \vec{E} в диэлектрике:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho + \rho'), \quad (1.2)$$

где ρ и ρ' – объёмные плотности сторонних и связанных зарядов в той точке, где вычисляется $\text{div } \vec{E}$. При использовании теорем (1.1) и (1.2) для вакуума следует учесть, что в этом случае $q' = \int_V \rho' dV = 0$ и $\rho' = 0$.

Теорема Гаусса для вектора поляризованности среды \vec{P} : поток вектора \vec{P} сквозь любую замкнутую поверхность S равен взятому с обратным знаком избыточному связанному заряду диэлектрика в объёме, охватываемом поверхностью интегрирования S , т.е.

$$\oint_S (\vec{P}, d\vec{s}) = -q'. \quad (1.3)$$

Дифференциальная форма теоремы Гаусса для вектора поляризованности среды \vec{P} :

$$\mathbf{div} \vec{P} = -\rho'. \quad (1.4)$$

Общее выражение для оператора **div** в ортогональных криволинейных системах координат приведено в приложении, расположенном в конце разработки.

Если выразить заряд q' через поток вектора \vec{P} по формуле (1.3) и подставить его в уравнение (1.1), то выражение (1.1) можно преобразовать к следующему виду:

$$\oint_S ((\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}), d\vec{s}) = q.$$

Величину, стоящую под интегралом во внутренних скобках, обозначают буквой \vec{D} и называют вектором электрического смещения или просто вектором \vec{D} . Таким образом, построен вспомогательный вектор \vec{D} :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (1.5)$$

поток которого через любую замкнутую поверхность S зависит только от стороннего заряда q , находящегося в объёме, ограниченном поверхностью интегрирования S .

Теорема Гаусса для вектора электрического смещения \vec{D} : поток вектора \vec{D} сквозь произвольную замкнутую поверхность S равен алгебраической сумме сторонних зарядов, охватываемых этой поверхностью, т.е.

$$\oint_S (\vec{D}, d\vec{s}) = q. \quad (1.6)$$

Заметим, что вектор \vec{D} представляет собой сумму двух совершенно различных величин: $\epsilon_0 \vec{E}$ и \vec{P} . Поэтому он действительно вспомогательный вектор, не имеющий какого-либо глубокого физического смысла. Однако, свойство (1.6) поля вектора \vec{D} оправдывает введение этого вектора: во многих случаях он значительно упрощает изучение электрического поля в диэлектриках [1].

Дифференциальная форма теоремы Гаусса для вектора электрического смещения \vec{D} :

$$\mathbf{div} \vec{D} = \rho, \quad (1.7)$$

т.е. дивергенция поля вектора \vec{D} равна объёмной плотности стороннего заряда в той же точке.

Если диэлектрик линейный и изотропный, то вектор поляризованности диэлектрика

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \kappa \vec{E}, \quad (1.8)$$

где κ – диэлектрическая восприимчивость вещества - скалярная величина, не зависящая от величины вектора напряжённости электрического поля.

Подставив зависимость (1.8) в соотношение (1.5), получим

$$\vec{D} = \varepsilon_0 (1 + \kappa) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}. \quad (1.9)$$

Безразмерную величину $\varepsilon = 1 + \kappa$ называют диэлектрической проницаемостью диэлектрика.

1.2. Методические рекомендации к решению задач по теме “Электростатика”.

В условиях предлагаемых задач, как правило, задан (явно в виде q или неявно в виде разности потенциалов) сторонний заряд на обкладках конденсатора. Выбирая поверхность интегрирования в соответствии с видом симметрии каждой задачи, по теореме Гаусса (1.6) находим вектор \vec{D} в зависимости от пространственных координат, которые для каждого рассматриваемого случая могут быть различными: либо декартовы (x, y, z) , либо сферические (r, θ, φ) , либо цилиндрические (r, φ, z) . Ниже будем рассматривать сферически симметричный случай, поэтому определяемые величины будут зависеть только от одной пространственной координаты – радиальной координаты r .

Далее из соотношения (1.9) определяем зависимость вектора напряжённости электростатического поля \vec{E} от радиальной координаты в диэлектрике:

$$E(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon_0 \varepsilon(r)}. \quad (1.10)$$

Вектор поляризованности \vec{P} связан с вектором напряжённости электростатического поля \vec{E} соотношением (1.8), поэтому

$$P(r) = \varepsilon_0 (\varepsilon(r) - 1) E(r). \quad (1.11)$$

В результате поляризации среды в диэлектрике возникает объёмная плотность связанных зарядов ρ' , которая определяется из соотношения (1.4). Объёмная плотность избыточных связанных зарядов внутри диэлектрика будет равна нулю при одновременном выполнении двух условий:

- 1) диэлектрик должен быть однородным;
- 2) внутри него не должно быть сторонних зарядов ($\rho = 0$) [1].

В нашем случае $\rho = 0$, поэтому появление ρ' обусловлено неоднородностью диэлектрика и наличием напряжённости электрического поля между обкладками конденсатора.

В результате поляризации среды на границе раздела диэлектриков или на границе раздела диэлектрик – вакуум могут появляться также и поверхностные связанные заряды. Связь между поляризованностью среды \vec{P} и поверхностной плотностью σ' связанных зарядов на границе раздела диэлектриков имеет вид:

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma', \quad (1.12)$$

где P_{2n} и P_{1n} - проекции вектора поляризованности \vec{P} в диэлектриках 2 и 1 на общую нормаль \vec{n} к границе раздела в данном месте (вектор \vec{n} проводят от диэлектрика 1 к диэлектрику 2). Из соотношения (1.12) следует, что на границе раздела диэлектриков нормальная составляющая вектора \vec{P} испытывает разрыв, величина которого равна зависящей от свойств

диэлектриков поверхностной плотности σ' связанных зарядов. Если среда 2 является вакуумом, то условие (1.12) приобретает более простой вид:

$$\sigma'(M) = P_n(M), \quad (1.13)$$

где M – точка, находящаяся на поверхности диэлектрика, а P_n – проекция вектора \vec{P} на нормаль \vec{n} , внешнюю по отношению к занятой диэлектриком области. Знак проекции P_n определяет и знак поверхностной плотности σ' связанного заряда в данной точке.

Далее необходимо найти суммарный связанный заряд диэлектрика:

$$q' = \int_V \rho'(V) dV + \int_S \sigma'(M) dS. \quad (1.14)$$

В соотношении (1.14) первое слагаемое учитывает суммарный связанный заряд, распределенный по объёму диэлектрика, второе слагаемое – суммарный связанный заряд, распределенный по всей поверхности рассматриваемого диэлектрика. Заметим, что значение q' в (1.14) должно быть равно нулю. Этот факт используется для проверки полученных результатов.

Для нахождения электроёмкости C конденсатора необходимо определить разность потенциалов между обкладками:

$$U = \varphi(R) - \varphi(R_0) = \int_R^{R_0} (\vec{E}, d\vec{r}).$$

Тогда по определению

$$C = \frac{q}{U}, \quad (1.15)$$

где заряд q соответствует поверхности конденсатора, потенциал которой равен $\varphi(R)$.

Замечание. Полученное значение электроёмкости C конденсатора определено верно, если оно удовлетворяет соотношению

$$\frac{CU^2}{2} = \int_V w dV, \quad (1.16)$$

где $w = \frac{(\vec{E}, \vec{D})}{2}$ – объёмная плотность энергии электростатического поля, V – объём, в котором локализовано электростатическое поле в конденсаторе.

1.3. Пример выполнения домашнего задания по теме “Электростатика”.

Задача. Радиусы внешней и внутренней обкладок сферического конденсатора равны R_0 и R соответственно. Заряд конденсатора равен q . Диэлектрическая проницаемость среды ϵ между обкладками изменяется по закону $\epsilon = f(r)$, где r – расстояние от центра сфер (рис.1.1).

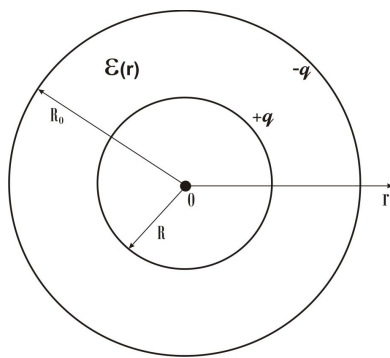


Рис.1.1

Найти распределение модулей векторов электростатического поля: электрического смещения \vec{D} , напряжённости \vec{E} и поляризованности \vec{P} в зависимости от радиальной координаты $r \in (R; R_0)$.

Определить поверхностную плотность связанных зарядов на внутренней σ_1' и внешней σ_2' поверхностях диэлектрика, распределение объёмной плотности связанных зарядов $\rho'(r)$ и ёмкость C конденсатора.

Выполнить проверку полученных результатов.

Решение. Пусть заданы следующие зависимости:

$$\frac{R_0}{R} = \frac{3}{1}, \quad \epsilon(r) = R_0^n / (R_0^n + R^n - r^n), \quad n = 4. \quad (1.17)$$

Преобразуем зависимость для диэлектрической проницаемости $\epsilon(r)$ с учётом заданного соотношения $R_0 = 3R$:

$$\varepsilon(r) = \frac{(3R)^4}{(3R)^4 + R^4 - r^4} = \frac{81R^4}{82R^4 - r^4} \quad (1.18)$$

Расчёт характеристик электростатического поля начнём с определения вектора электрического смещения $\vec{D}(r)$ между обкладками конденсатора.

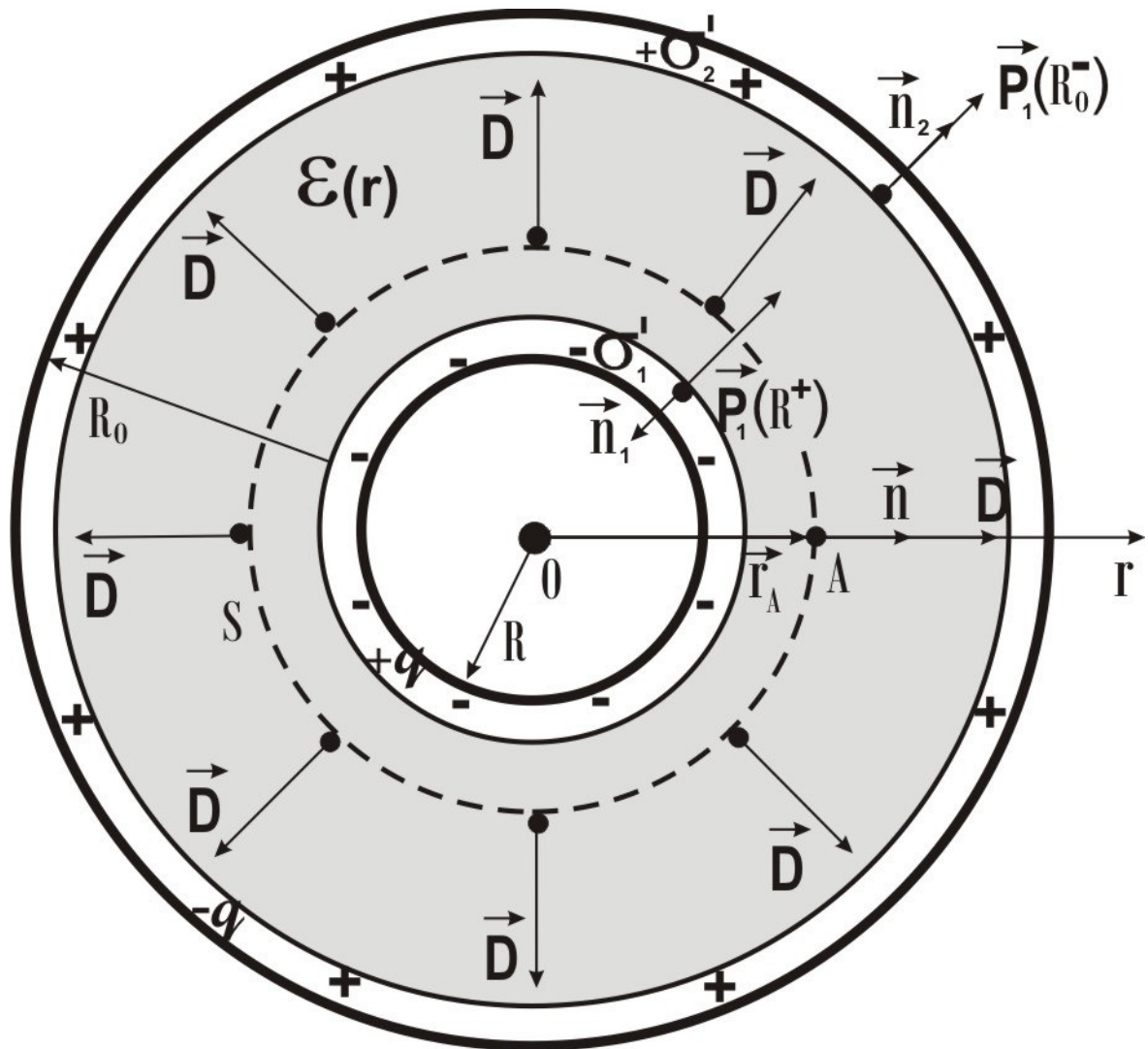


Рис.1.2.

Пусть сторонний заряд $q > 0$ равномерно распределён по внутренней обкладке. Воспользуемся теоремой Гаусса (1.6):

$$\oint_S (\vec{D}, d\vec{s}) = q.$$

Рассматриваемая задача обладает сферической симметрией, поэтому в качестве поверхности интегрирования S выбираем сферическую

поверхность произвольного радиуса $R < r < R_0$ с центром в начале координат, которая на рис.1.2 изображена пунктиром. Так как поле вектора \vec{D} сферически симметрично, то **в каждой точке поверхности S** направление вектора \vec{D} совпадает с направлением радиус-вектора \vec{r} точки наблюдения (точка А на рис. 1.2) и направлением внешней нормали \vec{n} к элементу ds поверхности S ; заметим также, что модуль вектора \vec{D} в каждой точке выбранной произвольной поверхности S является постоянной величиной. Поэтому из интегральной формулировки теоремы Гаусса (1.6) для вектора \vec{D}

$$\oint_s (\vec{D}, d\vec{s}) = \oint_s D_n ds = q,$$

где $ds = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = r^2 d\Omega$, $d\Omega$ – элемент телесного угла, с учётом $D_n = D(r)$ и $S = r^2 \Omega = r^2 4\pi$, вынося $D(r)$ из под знака интеграла и выполняя интегрирование, получаем

$$D(r)4\pi r^2 = q.$$

Зависимость $D(r)$ определена:

$$D(r) = \frac{q}{4\pi r^2}, \quad (R < r < R_0). \quad (1.19)$$

Найдём зависимость напряжённости $\vec{E}(r)$ электростатического поля между обкладками конденсатора. Связь напряжённости и электрического смещения для линейных, однородных и изотропных диэлектриков имеет вид (1.9):

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E},$$

откуда

$$E(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_0 \varepsilon}.$$

С учётом соотношения (1.18) для диэлектрической проницаемости среды $\varepsilon(r)$ зависимость $E(r)$ принимает вид:

$$E(r) = \frac{q(82R^4 - r^4)}{324\pi\varepsilon_0 R^4 r^2}, \quad (R < r < R_0). \quad (1.20)$$

Найдём зависимость поляризованности среды $\vec{P}(r)$ между обкладками конденсатора. Для линейных и изотропных диэлектриков связь между векторами \vec{P} и \vec{E} имеет вид (1.8):

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E},$$

откуда с учётом зависимости напряжённости электростатического поля от радиальной координаты (1.20) получаем распределение поляризованности среды $P(r)$ между обкладками конденсатора

$$P(r) = \frac{q(r^4 - R^4)}{324 \pi R^4 r^2}, \quad (R < r < R_0). \quad (1.21)$$

Заметим, что вектор поляризованности среды \vec{P} совпадает с направлением радиус-вектора \vec{r} , откуда следует, что тангенциальные проекции вектора \vec{P} обращаются в нуль $P_\theta = 0, P_\varphi = 0$, а радиальная проекция $P_r(r)$ определена зависимостью (1.21).

Рассмотрим вопрос об определении поверхностной плотности связанных зарядов на внутренней и внешней поверхностях сферического слоя диэлектрика, расположенного между обкладками конденсатора. Под действием электрического поля, созданного сторонними зарядами q и $-q$, находящимися на обкладках конденсатора, диэлектрик поляризуется, и в результате поляризации на внутренней и внешней поверхностях диэлектрика появляются связанные заряды. Вопрос о возникновении объёмных избыточных связанных зарядов рассмотрим ниже.

Для определения поверхностной плотности связанных зарядов на внутренней и внешней поверхностях сферического слоя диэлектрика, расположенного между обкладками конденсатора, воспользуемся соотношением (1.13). В рассматриваемой задаче на внутренней поверхности (обозначим её индексом 1) диэлектрика векторы $\vec{P}_1(R^+)$ и \vec{n}_1 в любой точке поверхности направлены противоположно (рис.1.2), поэтому знак поляризационного заряда отрицательный, что естественно согласуется с механизмом поляризации диэлектрика. В данном примере

для заданной зависимости $\varepsilon(r)$ имеем $(\vec{P}_1(R^+))_{n_1} = 0$, откуда следует, что поверхностная плотность связанных зарядов равна нулю: $\sigma_1' = 0$. На внешней поверхности 2 диэлектрика векторы $\vec{P}_1(R_0^-)$ и \vec{n}_2 в любой точке поверхности сонаправлены, поэтому знак проекции $(\vec{P}_1(R_0^-))_{n_2}$ положительный, а поверхностная плотность связанных зарядов отлична от нуля:

$$\sigma_2' = (\vec{P}_1(R_0^-))_{n_2} = \frac{20q}{729\pi R^2}. \quad (1.22)$$

Для нахождения объёмной плотности ρ' избыточных связанных зарядов внутри сферического слоя диэлектрика между пластинами конденсатора воспользуемся теоремой Гаусса (1.4) для поля вектора \vec{P} в дифференциальной форме:

$$\mathbf{div} \vec{P} = -\rho',$$

т.е. дивергенция поля вектора \vec{P} равна с обратным знаком объёмной плотности ρ' избыточного связанного заряда в той же точке.

В рассматриваемой задаче между обкладками конденсатора находится изотропный, но неоднородный диэлектрик, диэлектрическая проницаемость которого изменяется только в радиальном направлении по закону (1.18):

$$\varepsilon(r) = \frac{81R^4}{82R^4 - r^4},$$

где r – расстояние от центра сфер. Заметим, что вектор поляризованности среды \vec{P} имеет единственную отличную от нуля компоненту P_r , которая зависит только от радиальной координаты r . В этих условиях естественно ожидать, что и объёмная плотность избыточного связанного заряда внутри слоя диэлектрика будет также функцией только радиальной координаты r .

Для расчёта объёмной плотности связанных зарядов ρ' с помощью теоремы (1.4) воспользуемся выражением (5.2) из приложения для оператора div применительно к сферическим координатам:

$$\mathbf{div} \vec{P} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 P_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (P_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi}. \quad (1.23)$$

Из соображений симметрии ясно, что поляризованность диэлектрика в данном случае зависит только от радиальной координаты и не зависит от угловых координат, и это подтверждено результатами расчётов (1.21), поэтому у нас в правой части выражения (1.23) остаётся только первое слагаемое:

$$\mathbf{div} \vec{P} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 P_r). \quad (1.24)$$

При вычислении производной в правой части соотношения (1.24) учтём, что $P_r(r) = P(r)$, а зависимость $P(r)$ определена соотношением (1.21). Тогда для дивергенции вектора поляризованности среды имеем:

$$div \vec{P} = \frac{qr}{81\pi R^4},$$

откуда в соответствии с (1.4) для объёмной плотности связанных зарядов ρ' получаем

$$\rho'(r) = -\frac{qr}{81\pi R^4}. \quad (1.25)$$

Сделаем проверку полученных результатов. Для этого найдём суммарный связанный заряд диэлектрика по зависимости (1.14), используя при расчётах найденные соотношения (1.25) и (1.22) для объёмной $\rho'(r)$ и поверхностной $\sigma'(r)$ плотностей связанного заряда:

$$q' = \int_R^{R_0} \left(-\frac{qr}{81\pi R^4} \right) 4\pi r^2 dr + \int_s \left(\frac{20q}{729\pi R^2} \right) ds. \quad (1.26)$$

В (1.26) первое слагаемое в правой части учитывает суммарный связанный заряд, распределённый по объёму диэлектрика, второе слагаемое - суммарный связанный заряд, распределённый с постоянной поверхностной плотностью σ_2' по внешней сферической поверхности

диэлектрика радиуса $R_0 = 3R$. Здесь также учтено, что на внутренней поверхности диэлектрика в данной задаче связанный заряд отсутствует.

Проведём расчёт по формуле (1.26):

$$q' = \left(-\frac{q}{81\pi R^4}\right) 4\pi \left(\frac{(3R)^4}{4} - \frac{R^4}{4}\right) + \frac{20q}{729\pi R^2} (4\pi(3R)^2) = 0.$$

Это подтверждает, что зависимости $E(r)$, $D(r)$, $P(r)$, $\sigma_1'(r)$, $\sigma_2'(r)$, $\rho'(r)$ найдены верно.

Найдём электроёмкость C сферического конденсатора с радиусами обкладок R и R_0 . Согласно определению ёмкости конденсатора ($C = \frac{q}{U}$) задача сводится к определению разности потенциалов U при заданном заряде q :

$$U = \varphi(R) - \varphi(R_0) = \int_R^{R_0} E_r(r) dr, \quad (1.27)$$

где предполагается, что внутренняя обкладка имеет заряд $q > 0$, а путь интегрирования может быть любым, и мы выбираем самый простой и удобный – по радиальной координате. Легко видеть, что радиальная проекция вектора напряжённости электрического поля $E_r(r) = E(r)$ является единственной проекцией вектора напряжённости электростатического поля, а зависимость $E(r)$ определена соотношением (1.20). После подстановки зависимости (1.20) для $E(r)$ в соотношение (1.27) и соответствующего интегрирования находим напряжение между обкладками конденсатора и его ёмкость

$$U = \frac{23q}{162\pi\epsilon_0 R}, \quad C = \frac{162}{23}\pi\epsilon_0 R. \quad (1.28)$$

Полученное значение электроёмкости C сферического конденсатора определено верно, если оно удовлетворяет соотношению (1.16)

$$\frac{CU^2}{2} = \int_V w dV,$$

где $\frac{CU^2}{2}$ – энергия заряженного конденсатора, а в правой части - эта же величина, только она записана через полевые характеристики: $w = \frac{(\vec{E}, \vec{D})}{2}$ – объёмная плотность энергии электростатического поля, V – объём, в котором локализовано электростатическое поле в конденсаторе. Итак, проверим, удовлетворяет ли полученное значение C соотношению (1.16). Используя зависимости (1.19) и (1.20) для $D(r)$ и $E(r)$ и выполняя соответствующее интегрирование в правой части (1.16), получим:

$$\int_V w dV = \int_R^{3R} \frac{q}{4\pi r^2} \frac{q(82R^4 - r^4)}{324\pi\epsilon_0 R^4 r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{23q^2}{324\pi\epsilon_0 R}.$$

Располагая зависимостями (1.28) для разности потенциалов U и электроёмкости C , вычисляем значение $\frac{CU^2}{2}$ и убеждаемся в равенстве правой и левой частей соотношения (1.16). Это позволяет утверждать, что полученная зависимость для электроёмкости C сферического конденсатора найдена правильно.

2. МАГНИТОСТАТИКА

2.1. Основные сведения по теории

Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции \vec{B} в магнетике: циркуляция вектора \vec{B} по любому замкнутому контуру L равна алгебраической сумме токов (как токов проводимости I , так и токов намагничивания I'), пронизывающих произвольную поверхность, натянутую на контур L , т.е.

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{\ell}) = \mu_0 (I + I'). \quad (2.1)$$

Ток считается положительным, если его направление связано с направлением $d\vec{\ell}$ обхода по контуру правилом правого винта, ток противоположного направления считается отрицательным.

Теорема о циркуляции вектора намагниченности \vec{J} : циркуляция вектора \vec{J} по любому замкнутому контуру L равна алгебраической сумме токов намагничивания I' , пронизывающих произвольную поверхность, натянутую на контур L , т.е.

$$\oint_L (\vec{J}, d\vec{\ell}) = I', \quad (2.2)$$

где I' – суммарный ток намагничивания (как объёмный, так и поверхностный).

Дифференциальная форма теоремы о циркуляции вектора намагниченности \vec{J} :

$$\mathbf{rot} \vec{J} = \vec{j}', \quad (2.3)$$

т.е. ротор вектора намагниченности \vec{J} равен объёмной плотности тока намагничивания \vec{j}' в той же точке пространства. Общее выражение для оператора \mathbf{rot} в ортогональных криволинейных системах координат приведено в приложении (см. формулу (5.3)), расположенном в конце разработки.

Исключив в (2.1) ток I' с помощью (2.2), сформируем вектор напряжённости магнитного поля

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J},$$

циркуляция которого по любому замкнутому контуру L зависит только от алгебраической суммы токов проводимости I , пронизывающих произвольную поверхность, натянутую на контур L :

$$\oint_L (\vec{H}, d\vec{l}) = I. \quad (2.4)$$

Заметим, что практически воспользоваться соотношениями (2.1) и (2.4) можно только, если рассматриваемая физическая ситуация обладает достаточно высокой степенью симметрии.

Если магнетик линейный и изотропный, то имеют место зависимости для вектора намагниченности среды

$$\vec{J} = \chi \vec{H},$$

где χ – магнитная восприимчивость вещества (она не зависит от вектора напряжённости магнитного поля \vec{H}), и вектора магнитной индукции:

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad (2.5)$$

где μ – магнитная проницаемость магнетика и

$$\chi = \mu - 1.$$

Последнее соотношение имеет место только для таких магнетиков, у которых однородная зависимость между вектором намагниченности \vec{J} и вектором \vec{H} имеет линейный характер. Магнитная восприимчивость χ – безразмерная величина, характерная для каждого данного магнетика. В отличие от диэлектрической восприимчивости κ , которая всегда положительна, магнитная восприимчивость бывает как положительной, так и отрицательной. Соответственно магнетики, подчиняющиеся зависимости $\vec{J} = \chi \vec{H}$, подразделяют на парамагнетики ($\chi > 0$) и диамагнетики ($\chi < 0$). У парамагнетиков вектор намагниченности параллелен вектору напряжённости магнитного поля $\vec{J} \uparrow \uparrow \vec{H}$, у диамагнетиков эти векторы направлены антипараллельно $\vec{J} \uparrow \downarrow \vec{H}$. Кроме пара- и диамагнетиков существуют ферромагнетики, у которых зависимость $\vec{J}(\vec{H})$ имеет весьма

сложный характер: она нелинейная и, помимо этого, может описывать явление гистерезиса [1].

2.2. Методические рекомендации к решению задач по теме “Магнитостатика”.

В условиях предлагаемых задач задан ток проводимости I или распределение объёмной плотности \vec{j} тока проводимости по поперечному сечению рассматриваемого устройства, магнитное поле в котором подлежит исследованию. Выбирая в соответствии с видом симметрии конкретной задачи контур, по которому вычисляется циркуляция, из соотношения (2.4) находим распределение вектора напряжённости магнитного поля \vec{H} , а по соотношению (2.5) определяем распределение вектора магнитной индукции \vec{B} по пространственным координатам. Вектор намагничённости \vec{J} имеет вид:

$$\vec{J} = (\mu - 1)\vec{H}. \quad (2.6)$$

В силу зависимостей (2.5) и (2.6) векторы магнитной индукции \vec{B} и намагничённости среды \vec{J} параллельны вектору напряжённости магнитного поля \vec{H} . Таким образом, полевые характеристики магнитного поля определены.

Плотность тока намагничивания \vec{j}' , распределённого по объёму магнетика, находим из дифференциальной формы теоремы (2.3) о циркуляции вектора намагничённости \vec{J} . Плотность поверхностных токов намагничивания, текущих по поверхности раздела магнетиков, находим с помощью теоремы (2.2) о циркуляции вектора намагничённости \vec{J} . Специфика применения этой теоремы к данному вопросу будет подробно рассмотрена ниже применительно к конкретной задаче, т.к. выбор контура интегрирования L зависит от типа симметрии и от условий задачи.

2.3. Пример выполнения домашнего задания по теме “Магнитостатика”.

Задача. Проводник с током, равномерно распределённым по его поперечному сечению и имеющим плотность \vec{j} , имеет форму трубки круглого поперечного сечения, внешний и внутренний радиусы которой равны R_0 и R соответственно. Магнитная проницаемость магнетика задана зависимостью $\mu = f(r)$, где r – расстояние от оси трубки (рис.2.1).

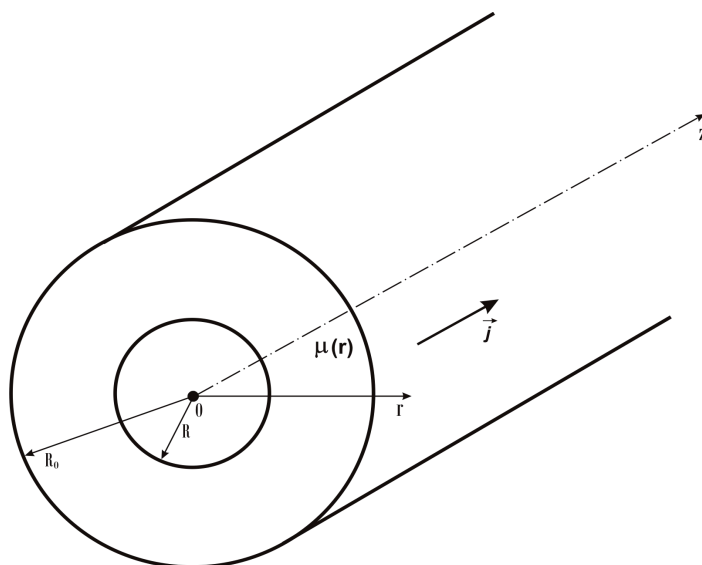


Рис.2.1

Найти зависимости модулей векторов индукции \vec{B} и напряжённости \vec{H} магнитного поля, а также модуля вектора намагничённости \vec{J} среды в зависимости от радиальной координаты $r \in (R; R_0)$.

Определить линейную плотность поверхностных токов намагничивания $\vec{i}'_{пов}$ на внутренней и внешней поверхностях трубки и распределение объёмной плотности токов намагничивания $\vec{j}'_{об}(r)$.

Решение. Пусть для определённости заданы следующие зависимости:

$$\frac{R_0}{R} = \frac{3}{2}, \quad n = 2, \quad (2.7)$$

$$\mu = \frac{(R^n + r^n)}{2R^n}. \quad (2.8)$$

Преобразуем зависимость для магнитной проницаемости $\mu(r)$ с учётом заданного соотношения (2.7):

$$\mu = \frac{1}{2} + \frac{r^2}{2R^2}. \quad (2.9)$$

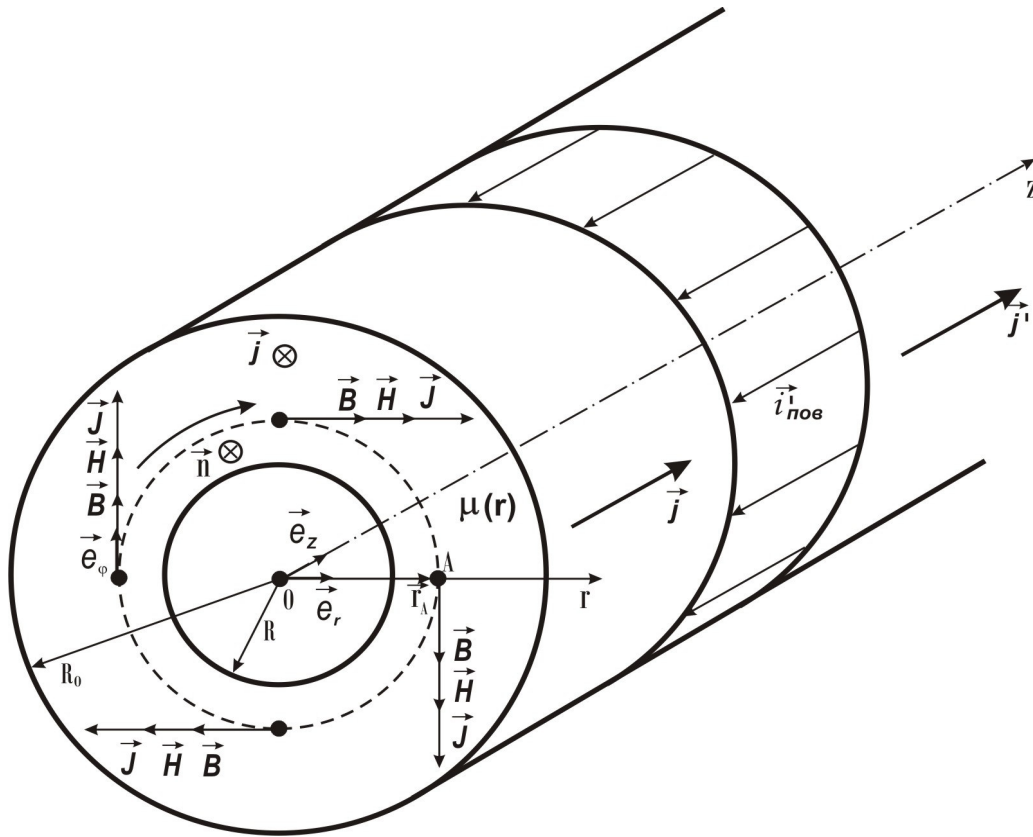


Рис.2.2

Найдём вектор напряжённости \vec{H} магнитного поля внутри трубки. По условию задачи вектор объёмной плотности тока проводимости \vec{j} параллелен оси трубки (рис.2.2). Из симметрии задачи следует, что силовые линии вектора \vec{H} в рассматриваемом случае должны иметь вид окружностей с центром на оси трубки и лежащих в плоскости поперечного сечения трубки [1]. Модуль вектора \vec{H} должен быть одинаков во всех точках на одинаковом расстоянии r от оси трубки. Для определения напряжённости поля \vec{H} внутри трубки воспользуемся теоремой о циркуляции вектора \vec{H} (2.4):

$$\oint_L (\vec{H}, d\vec{l}) = \int_S (\vec{j}, d\vec{s}).$$

В качестве контура интегрирования L выбираем одну из описанных выше окружностей радиуса $r_a \in (R; R_0)$, в каждой точке которой вектор \vec{H} касателен к ней. Направления вектора \vec{j} и вектора единичной нормали \vec{n} к плоскости, ограниченной контуром L , совпадают, причём направление \vec{n} связано с направлением обхода по контуру (на рис.2.2 показано дугой со стрелкой) правилом правого винта. По теореме о циркуляции вектора \vec{H} для контура L получаем:

$$H \cdot 2\pi r_a = j(\pi r_a^2 - \pi R^2),$$

откуда, опуская индекс a (так как r_a выбран произвольно, то последнее соотношение справедливо для любого $R < r < R_0$), для величины напряжённости магнитного поля H получаем

$$H = \frac{j(r^2 - R^2)}{2r}, \quad R < r < R_0. \quad (2.10)$$

Следует заметить, что магнитное поле внутри трубки при $r < R$ отсутствует, а снаружи - при $r > R_0$ - величина напряжённости магнитного поля H определяется зависимостью

$$H = \frac{5jR^2}{8r}, \quad r > R_0, \quad (2.11)$$

что также легко показать с помощью теоремы о циркуляции вектора \vec{H} . Отметим, что при переходе через $r = R_0$ напряжённость магнитного поля H не испытывает скачка.

Определим модуль вектора магнитной индукции \vec{B} по соотношению (2.5) с учётом зависимостей (2.10) для H и (2.8) для магнитной проницаемости $\mu(r)$ магнетика:

$$B = \mu\mu_0 H = \frac{\mu_0 j(r^4 - R^4)}{4R^2 r}, \quad R < r < R_0. \quad (2.12)$$

В рассматриваемой задаче магнетик неоднородный, но линейный и изотропный, поэтому связь $\vec{J} = \chi \vec{H}$, где χ - магнитная восприимчивость вещества, остаётся справедливой. Итак, значение

магнитной индукции \vec{B} внутри трубки при $r \in (R; R_0)$ определено соотношением (2.12), а снаружи при $r > R_0$ зависимость величины магнитной индукции от радиальной координаты $B(r)$ принимает вид:

$$B = \mu_0 H = \frac{5\mu_0 j R^2}{8r}.$$

Найдём модуль вектора намагниченности \vec{J} при $r \in (R; R_0)$ по соотношению (2.6):

$$J = \chi H = (\mu - 1)H = \frac{j(r^2 - R^2)^2}{4R^2 r}. \quad (2.13)$$

Намагниченность \vec{J} снаружи трубки при $r > R_0$ равна нулю, так как в этой области магнетик отсутствует и $\chi = 0$. Внутри трубки при $r < R$ намагниченность \vec{J} тоже равна нулю по этой же причине.

Ориентация векторов \vec{H} , \vec{B} и \vec{J} в пространстве показана на рис. 2.2.

Таким образом, полевые характеристики магнитного поля внутри трубки при $r \in (R; R_0)$ и снаружи при $r > R_0$ определены, а при $r < R$ магнитное поле отсутствует.

Плотность тока намагничивания \vec{j}' , распределённого по объёму магнетика, найдём, используя дифференциальную форму теоремы о циркуляции вектора намагниченности \vec{J} (2.3):

$$\mathbf{rot} \vec{J} = \vec{j}',$$

а выражение для оператора \mathbf{rot} применительно к цилиндрическим координатам выпишем из приложения:

$$\mathbf{rot} \vec{J} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial J_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial(rJ_\varphi)}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial J_r}{\partial z} - \frac{\partial J_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rJ_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial J_r}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z. \quad (2.14)$$

Легко видеть, что в рассматриваемом примере $J_r = J_z = 0$ и $\frac{\partial J_\varphi}{\partial z} = 0$, поэтому в правой части формулы (2.14) только в составляющей по оси Z остаётся первое слагаемое

$$(\mathbf{rot} \vec{J})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(rJ_\varphi)}{\partial r}.$$

Подставляя в последнее соотношение зависимость проекции вектора намагниченности среды J_φ от радиальной координаты по формуле (2.13) и выполняя соответствующие операции, для проекции вектора плотности тока намагничивания $(\vec{j}')_z$ имеем:

$$(\vec{j}')_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{j(r^2 - R^2)^2}{4R^2 r} \right) = \left(\frac{r^2}{R^2} - 1 \right) j. \quad (2.15)$$

Следует заметить, что правая часть (2.15) в области $r \in (R; R_0)$ является величиной положительной и для рассматриваемого случая, если $\vec{J} \uparrow \uparrow \vec{H}$ (для парамагнетика), векторы плотности тока проводимости \vec{j} и объёмной плотности тока намагничивания \vec{j}' совпадают по направлению.

Для определения линейной плотности поверхностных токов намагничивания воспользуемся теоремой о циркуляции вектора намагниченности \vec{J} (2.2):

$$\oint_L (\vec{J}, d\vec{\ell}) = I'.$$

Применим теорему о циркуляции вектора \vec{J} к бесконечно малому контуру ABCD (рис.2.3), расположенному в плоскости, перпендикулярной оси Oz. Криволинейные отрезки контура AB и CD представляют собой дуги окружностей радиусов R_0^+ и R_0^- , а прямолинейные отрезки контура BC и DA пренебрежимо малы по сравнению с длинами отрезков AB и CD контура. Тогда при вычислении тока намагничивания I' в правой части соотношения (2.2), который пронизывает элементарную площадку, ограниченную этим контуром, можно не учитывать ток, распределённый по объёму магнетика, т.к. его вклад в I' пренебрежимо мал, а рассматривать только поверхностный ток намагничивания, вектор линейной плотности которого обозначим $\vec{i}'_{нов}$. По этой же причине (в общем случае) можно пренебречь вкладом в циркуляцию вектора \vec{J} по боковым сторонам BC и DA, а в условиях нашей конкретной задачи

$\int_{BC} (\vec{J}, d\vec{l}) = \int_{DA} (\vec{J}, d\vec{l}) = 0$ ещё и по причине ортогональности векторов \vec{J} и $d\vec{l}$ в каждой точке отрезков BC и DA контура.

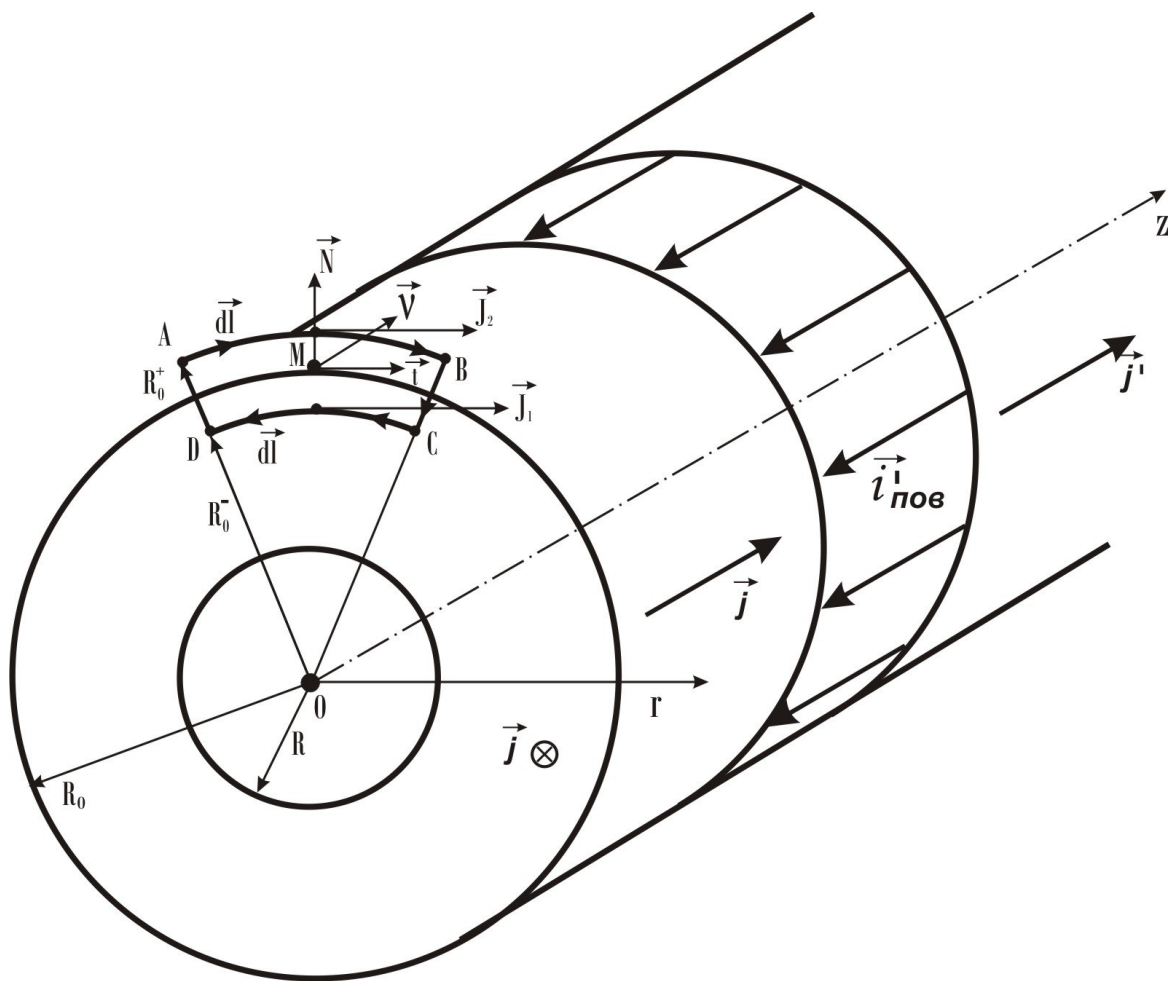


Рис.2.3

Учитывая значимость данного вопроса, целесообразно подробно проанализировать ориентацию единичных векторов нормали и касательных направлений на поверхности раздела магнетиков для описываемой задачи (см. рис.2.3). На рисунке: \vec{N} – единичный вектор нормали к элементу поверхности раздела двух магнетиков (в рассматриваемой задаче это поверхность раздела магнетик- вакуум) в окрестности точки наблюдения M, \vec{t} – единичный вектор, лежащий в касательной плоскости к поверхности раздела в точке наблюдения, а единичный вектор \vec{v} лежит также в этой касательной плоскости и является ортогональным к вектору нормали \vec{N} и выбранному касательному направлению – вектору \vec{t} . Легко заметить, что в

условиях рассматриваемой задачи вектор \vec{v} перпендикулярен плоскости элементарного контура ABCD и обуславливает положительное направление обхода этого контура, циркуляция вектора намагниченности \vec{J} по которому лежит в основе вывода локального соотношения для касательных компонент вектора \vec{J} на границе раздела двух магнетиков. Это соотношение выполняется в каждой точке поверхности раздела S .

Итак, в рассматриваемом приближении циркуляции вектора намагниченности \vec{J} по бесконечно малому контуру ABCD будет равна

$$\oint_{ABCD} (\vec{J}, d\vec{l}) = (J_{2t} - J_{1t})l. \quad (2.16)$$

Как было показано выше, правая часть теоремы о циркуляции вектора \vec{J} представляет собой только поверхностный ток намагничивания $I'_{нов}$, где линейная плотность поверхностного тока намагничивания $\vec{i}'_{нов}$ в условиях рассматриваемой задачи определена соотношением:

$$dI'_{нов} = (\vec{i}'_{нов}, \vec{v}) dl = (\vec{i}'_{нов})_v dl,$$

откуда следует, что под линейной плотностью $i'_{нов}$ поверхностных токов намагничивания понимается количество электричества, протекающего в единицу времени через единицу длины отрезка, расположенного на поверхности, по которой течёт ток намагничивания, и перпендикулярного направлению тока [3]. Тогда для поверхностного тока намагничивания $I'_{нов}$ получаем следующее соотношение:

$$I'_{нов} = \int_0^l (\vec{i}'_{нов})_v dl, \quad (2.17)$$

а предельным переходом из соотношения (2.17) с учётом равенства (2.16) получаем граничное условие, которому в данной задаче должен удовлетворять вектор намагниченности \vec{J} на границе раздела двух магнетиков:

$$J_{2t} - J_{1t} = (\vec{i}'_{нов})_v, \quad (2.18)$$

где J_{1t} и J_{2t} - касательные компоненты вектора \vec{J} в первой и второй средах. И так, локальное условие (2.18) является прямым следствием теоремы о циркуляции вектора намагниченности \vec{J} . Заметим, что в правой части соотношения (2.18) индекс ν может быть заменен индексом z , так как в условиях рассматриваемой задачи направление, задаваемое ортом $\vec{\nu}$, и направление оси Oz совпадают.

Применительно к нашей задаче рассмотрим внешнюю цилиндрическую поверхность S раздела радиуса $R_0 = \frac{3}{2}R$. Здесь среда 1 – это область пространства, заполненного магнетиком, а среда 2 – вакуум. В первой среде в каждой точке поверхности раздела касательная компонента J_{1t} вектора намагниченности \vec{J} определяется зависимостью (2.13), во второй среде $J_{2t} = 0$, т.к. $\vec{J}_2 = \chi \vec{H}$, а магнитная восприимчивость χ для вакуума равна нулю. Тогда из локального соотношения (2.18) с учётом зависимости (2.13) имеем:

$$(\vec{i}'_{нов})_z = -\frac{25}{96}Rj. \quad (2.19)$$

Можно показать, что на внутренней поверхности трубки, также являющейся поверхностью раздела магнетик – вакуум, поверхностный ток намагничивания отсутствует. В данном случае из зависимости (2.13) при $r = R$ следует, что $J_{1t} = 0$, а $J_{2t} = 0$, т.к. вторая среда – вакуум. Поэтому из локального соотношения (2.18) на поверхности раздела двух сред следует, что поверхностный ток намагничивания на внутренней поверхности трубки отсутствует.

Полученные результаты позволяют записать для вектора $\vec{i}'_{нов}$ линейной плотности поверхностных токов намагничивания в условиях рассматриваемой задачи следующее равенство:

$$\vec{i}'_{нов} = (\vec{i}'_{нов})_z \vec{\nu},$$

т.е. ток намагничивания на внешней поверхности трубки направлен противоположно току намагничивания, распределённого по объёму магнетика. Заметим, что векторы $\vec{i}'_{нов}$ и \vec{J} взаимно перпендикулярны.

Сделаем проверку полученных результатов. Найдём суммарный ток намагничивания, используя при этом найденные зависимости (2.15) и (2.19). Итак,

$$I' = \int_0^{2\pi R_0} i'_{нов} dl + \int_S \left(\frac{r^2}{R^2} - 1 \right) j 2\pi r dr = -\frac{25}{32} \pi R^2 j + 2\pi j \left[\frac{r^4}{4R^2} - \frac{r^2}{2} \right]_R^{R_0} = 0, \quad (2.20)$$

где первое слагаемое в правой части соотношения (2.20) представляет собой поверхностный ток намагничивания, текущий в отрицательном направлении оси Oz, а второе - ток намагничивания, распределённый по объёму магнетика и текущий в противоположном направлении.

Следует отметить, что вектор $\vec{i}'_{нов}$ линейной плотности поверхностных токов намагничивания в рассматриваемой задаче имеет только одну составляющую - по оси Oz. Это подтверждается результатами расчётов, которые находятся в согласии с положением, что вне магнетика магнитные поля обоих токов намагничивания компенсируют друг друга.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Общие выражения для операторов $grad, div, rot, \nabla^2$ в ортогональной криволинейной системе координат (x_1, x_2, x_3) :

$$grad U = \frac{1}{h_1} \frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial U}{\partial x_3}, \quad (5.1)$$

$$div \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 A_{x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 h_3 A_{x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 A_{x_3}) \right], \quad (5.2)$$

$$rot \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \vec{e}_1 & h_2 \vec{e}_2 & h_3 \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1 A_{x_1} & h_2 A_{x_2} & h_3 A_{x_3} \end{vmatrix}, \quad (5.3)$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial U}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial U}{\partial x_3} \right) \right]. \quad (5.4)$$

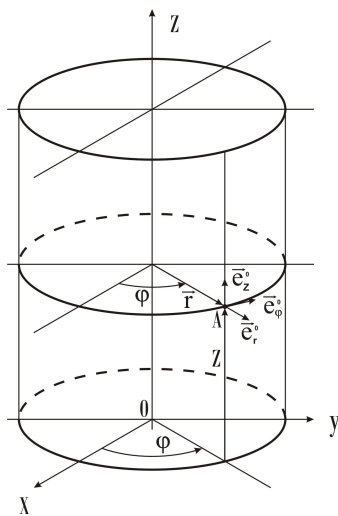
Здесь U – скалярная функция; $\vec{A} = \{A_{x_1}, A_{x_2}, A_{x_3}\}$ – вектор-функция; $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ – единичные базисные векторы; (h_1, h_2, h_3) – метрические элементы или коэффициенты Ламэ.

Прямоугольные координаты:

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z; \quad h_1 = 1, \quad h_2 = 1, \quad h_3 = 1; \quad \vec{e}_1 = \vec{i}; \quad \vec{e}_2 = \vec{j}; \quad \vec{e}_3 = \vec{k}. \quad (5.5)$$

Цилиндрические координаты:

$$x_1 = r, \quad x_2 = \varphi, \quad x_3 = z; \quad h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = 1; \quad \vec{e}_1 = \vec{e}_r; \quad \vec{e}_2 = \vec{e}_\varphi; \quad \vec{e}_3 = \vec{e}_z. \quad (5.6)$$



Связь с прямоугольными координатами:

$$x = R \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi; \quad z = z.$$

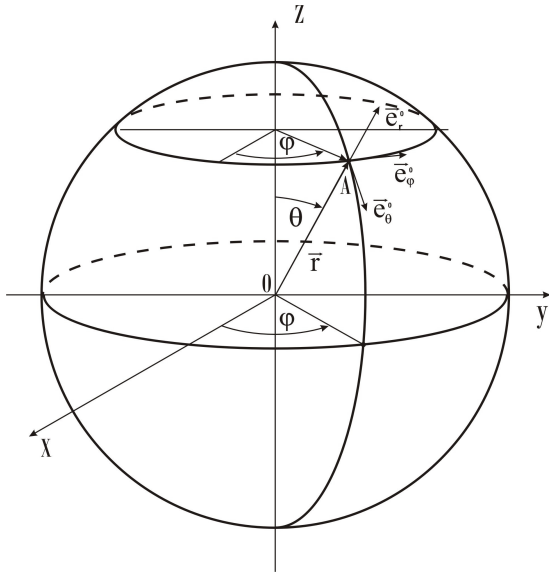
Координатные поверхности:

цилиндры $r = const$, плоскости $\varphi = const$,
плоскости $z = const$.

Сферические координаты:

$$x_1 = r, \quad x_2 = \theta, \quad x_3 = \varphi; \quad h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r \sin \theta;$$

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_r; \quad \vec{e}_2 = \vec{e}_\theta; \quad \vec{e}_3 = \vec{e}_\varphi. \quad (5.7)$$



Связь с прямоугольными координатами:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

Координатные поверхности:

концентрические сферы $r = const$,
плоскости $\varphi = const$, конусы $\theta = const$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иродов И.Е., Электромагнетизм. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000.
2. Сивухин Д.В., Общий курс физики, т.3. Электричество. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1996
3. Детлаф А.А., Яворский Б.М., Курс физики. М.: Высшая школа, 2000.
4. Тамм И.Е., Основы теории электричества. М.: Наука, 1989.
5. Савельев И.В., Курс общей физики, т.4. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1998.

Оглавление

1. Электростатика _____ стр. 2-15.
2. Магнитостатика _____ стр.16-27.
3. Электромагнитная индукция _____ стр.28-48.
4. Электрическое поле в проводящей среде _____ стр.49-58.
5. Приложение _____ стр.59-60.
6. Список использованной литературы _____ стр.61.